

Progetto di ricerca e piano delle attività per un assegno di ricerca sul tema
"Combinatorics and topology of hyperplane arrangements and Coxeter groups"

nell'ambito del progetto PRIN 2022A7L229 - CUP J53D23003660006-

Prof. Giovanni Paolini

8 ottobre 2024

INTRODUZIONE

In questo progetto illustriamo brevemente tre problemi di ricerca che riguardano gli arrangiamenti di iperpiani e i gruppi di Coxeter, al crocevia di almeno tre discipline: algebra, combinatoria e topologia. Si tratta di un'area di ricerca che si è sviluppata enormemente negli ultimi anni e continua a crescere in nuove direzioni; pertanto, i tre problemi presentati sono da intendere soprattutto come esempi delle tematiche, assai più numerose, che il vincitore o la vincitrice dell'assegno potrà affrontare nel proprio lavoro di ricerca. Siamo aperti a candidate e candidati con formazioni e interessi diversi, che potranno ampliare lo spettro di conoscenze del nostro gruppo, per lavorare sui problemi qui illustrati o su altre tematiche ad esse correlate.

LINEE DI RICERCA

La prima linea di ricerca riguarda il problema di caratterizzare, in uno spazio vettoriale complesso, gli arrangiamenti di iperpiani il cui complementare è asferico (cioè ha i gruppi di omotopia successivi al primo banali). In un recente lavoro di Yoshinaga [Yos24], viene descritta una ostruzione puramente combinatoria all'asfericità. Ci proponiamo di studiare se sia possibile indebolire tale ostruzione, escludendo l'asfericità di un numero maggiore di arrangiamenti e avvicinandoci ad una caratterizzazione il più possibile combinatoria. D'altra parte, siamo anche interessati a sviluppare ulteriormente tecniche per dimostrare l'asfericità nei casi rimanenti. A tal fine, possiamo ad esempio cercare di estendere il noto teorema di Deligne [Del72] sull'asfericità di arrangiamenti simpliciali. All'interno del nostro Dipartimento, l'assegnista potrà collaborare con questi temi con Giovanni Paolini, Luca Moci, e Roberto Pagaria.

La seconda linea di ricerca riguarda la combinatoria e la geometria del gruppo simmetrico S_n , e più in generale dei gruppi di Coxeter. Ad essi sono associati diversi importanti CW-complexi, tra cui il complesso delle trecce duale ("dual braid complex"). È congetturato che tale complesso abbia curvatura non positiva nel senso di Alexandrov [Ale51], e tale

congettura è stata verificata al computer fino ad $n=7$ [BM10]. Progressi recenti che potrebbero permettere di comprendere meglio questo complesso sono stati effettuati da Dougherty e McCammond [DM22], immergendo il dual braid complex nel classico spazio delle configurazioni di n punti nel piano, utilizzando per quest'ultimo un'interpretazione come spazio dei polinomi con radici distinte. Si possono tentare ulteriori progressi trovando altri collegamenti con la combinatoria del gruppo simmetrico, di cui sono esperti diversi professori del nostro Dipartimento, come Riccardo Biagioli, Fabrizio Caselli, Giovanni Paolini, Jacopo Gandini, e Luca Moci.

Il terzo problema riguarda il conteggio di regioni in un arrangiamento di iperpiani parziale. In effetti uno spazio vettoriale reale è diviso da un arrangiamento di iperpiani in regioni (dette anche camere); il numero di tali regioni è stato determinato da Zaslavsky [Zas77], ed è la valutazione in -1 del polinomio caratteristico del poset associato all'arrangiamento. Risultati analoghi sono stati ottenuti per il complementare di arrangiamenti torici da Lawrence [Law11]. Più specificamente, vorremmo ottenere formule per il conteggio di regioni determinate non da interi iperpiani bensì da solo parte di essi: queste parti sono dette muri. La motivazione alla base di questo problema è dovuta allo studio di spazi di moduli in geometria algebrica. Tali spazi sono determinati da alcuni parametri che vivono naturalmente in uno spazio vettoriale reale. Questo spazio vettoriale è dotato di una struttura di camere e muri che controlla la geometria dello spazio di moduli: all'interno della stessa camera tutti gli spazi di moduli sono diffeomorfi e attraversando un muro la geometria di tali spazi cambia radicalmente. Una volta studiata e sviluppata la teoria generale, il ricercatore si focalizzerà sul caso di certi muri ottenuti dall'arrangiamento di iperpiani di tipo A_n , descritto da Cipriani e Lanini [CL23] e profondamente legato allo spazio di moduli di fasci perversi in P_n . La congettura afferma che il numero di tali camere è il binomiale centrale $\binom{2n}{n}$; essa è stata verificata per $n \leq 7$. Si crede inoltre che tali camere siano controllate dalla combinatoria in tipo B , come le non-crossing partition di tipo B , i numeri di Narayana in tipo B , etc. Il lavoro potrà essere svolto con la collaborazione dei membri del dipartimento Luca Moci, Roberto Pagaria e Giovanni Paolini e con membri del progetto PRIN Martina Lanini e Michele D'Adderio.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Ale51] Alexandrov, A. D.: A theorem on triangles in a metric space and some of its applications, Trudy Mat. Inst. Steklov 38 (1951), 5–23.

[BM10] Brady, T., & McCammond, J.: Braids, posets and orthoschemes, Algebr. Geom. Topol. 10 (2010), no. 4, 2277–2314.

[DM22] Dougherty, M., & McCammond, J.: Geometric combinatorics of polynomials I: the case of a single polynomial, *Journal of Algebra* (2022), 607, 106-138.

[CL23] Cipriani, A., & Lanini, M. (2023). Wall And Chamber Structure For A Special Biserial Algebra Coming From Perverse Sheaves on \mathbb{P}^n . arXiv preprint arXiv:2308.00991.

[Del72] Deligne, P.: Les immeubles des groupes de tresses généralisés. *Invent Math* 17, 273–302 (1972).

[Law11] Lawrence, J.: Enumeration in torus arrangements. *European Journal of Combinatorics*, 32 (6), 870—881 (2011).

[Yos24] Yoshinaga, M.: A construction of homotopically non-trivial embedded spheres for hyperplane arrangements, arXiv preprint arXiv:2405.20010 (2024).

[Zas77] Zaslavsky, T.: A combinatorial analysis of topological dissections. *Adv. Math.* 25(3), 267–285 (1977).

IL GRUPPO DI RICERCA

Insieme a Michele D’Adderio (Università di Pisa) e Martina Lanini (Università di Roma 2 “Tor Vergata”), Luca Moci ha dato vita ad un gruppo di ricerca che ha ottenuto un importante finanziamento nell’ambito del progetto del progetto al PRIN2022_MOCI dal titolo ALgebraic and TOPological combinatorics (ALTOP) 2022A7L229 - CUP J53D23003660006. Nel nostro Dipartimento, oltre a Luca Moci, collaborano a tale attività di ricerca Giovanni Paolini, Jacopo Gandini, e Roberto Pagaria, oltre a due dottorande e due assegnisti, Alejandro Vargas e Martina Costa Cesari. Il vincitore del presente assegno di ricerca potrà inserirsi in questo gruppo di ricerca trasversale, lavorando sulle direzioni di ricerca più vicine ai propri interessi ed alle proprie competenze, nell’ambito degli obiettivi del PRIN suddetto.

UN PIANO DI ATTIVITA’

La vincitrice o il vincitore del bando lavorerà, a propria scelta, su alcuni dei problemi illustrati nel presente progetto, in collaborazione con i docenti e ricercatori sopra menzionati. Potrà inoltre perseguire in autonomia altre linee di ricerca, sempre nell’ambito delle tematiche del progetto del progetto al PRIN2022_MOCI dal titolo ALgebraic and TOPological combinatorics (ALTOP) 2022A7L229 - CUP J53D23003660006. Riceverà dal proprio tutor (Giovanni Paolini) il supporto organizzativo, economico e scientifico necessario per l’espletamento delle proprie attività di ricerca. Verrà incluso/a tra i

partecipanti del PRIN suddetto. Parteciperà regolarmente al Seminario di Algebra e Geometria, ai Colloqui e, più in generale, alla vita scientifica del Dipartimento. Se lo desidera potrà contribuire all'attività didattica del nostro dipartimento, proponendosi come tutor di corsi della laurea triennale oppure come co-docente di un corso di dottorato. L'attività di ricerca dell'assegnista sarà finalizzata alla produzione di risultati matematici originali e di rilievo, da pubblicare su riviste di livello buono o ottimo.

Finanziato dall'Unione Europea - NextGenerationEU a valere sul Piano Nazionale di Ripresa e Resilienza (PNRR) – Missione 4 Istruzione e ricerca – Componente 2 Dalla ricerca all'impresa - Investimento 1.1, Avviso Prin 2022 indetto con DD N. 104 del 2/2/2022, dal titolo PRIN2022_MOCI dal titolo ALgebraic and TOPological combinatorics (ALTOP), codice proposta 2022A7L229, CUP J53D23003660006 per € 11.000,00 e da Finanziamento di Ateneo assegnato nell'ambito della II tornata BIR 2024 per € 13.000,00